На правах рукописи

ТРОНИН Сергей Николаевич

ОПЕРАДНЫЕ И КАТЕГОРНЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ МНОГООБРАЗИЙ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

Специальность 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Казань — 2011

Работа выполнена на кафедре алгебры и математической логики ФГАОУВПО "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Официальные оппоненты:

доктор физико–математических наук, профессор
Бокуть Леонид Аркадьевич

доктор физико–математических наук, профессор
Артамонов Вячеслав Александрович

доктор физико–математических наук, профессор
Пинус Александр Георгиевич

Ведущая организация:
ГОУВПО "Ульяновский государственный университет"

Защита состоится 9 июня 2011 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.24 в конференц-зале библиотеки Казанского государственного университета (2-е здание) по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Казанского федерального университета.

Автореферат разослан "__" __________ 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент А. И. Еникеев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Постановка задачи и актуальность темы диссертации. По мнению Ю.И.Манина, “*Стимулированное КТП* [квантовой теории поля — Авт.] *возрождение теории операд было крупным событием в той тихой заводи, которой казалась общая алгебра*” [9, с. 130]. Данную работу можно рассматривать как попытку уточнить (и отчасти по-новому обосновать) это утверждение в одном из возможных направлений.

Теория операд (и их многосортных обобщений — мультикатегорий) фактически возникла около 1968–1969 годов независимо в работе И.Ламбека [24] по категорной теории доказательств, а также (под другим названием) в работах по алгебраической топологии (см. книгу [4]). Термин “операда” появился впервые в 1972 году в книге Дж. Мэя [10]. Впрочем, операды (под иными названиями) и прежде появлялись в работах других математиков. Например, в 1969 году в статье В.А. Артамонова [2] исследовался объект, который сейчас называется “операдой эндоморфизмов”. Мультикатегории были также переоткрыты А.А.Бейлинсоном и В.Г. Дринфельдом [14] под названием псевдотензорных категорий.

В некоторых теориях операды уже много лет фактически присутствовали под разными именами и в несколько измененном виде. Например, операдами оказались замкнутые классы булевых функций (и другие функциональные системы), известные еще с 1920-х годов. Специалисты считают, что даже решенную А.Н.Колмогоровым и В.И.Арнольдом в конце 1950-х годов 13-ю проблему Гильберта можно интерпретировать как утверждение о строении некоторой операды. Литература по теории операд уже довольно обширна, и дать ее полный обзор — достаточно сложная задача. Однако следует отметить, что работ по операдам, напрямую относящихся к универсальной алгебре, пока еще очень немного. О некоторых других направлениях теории операд, мультикатегорий, и их приложений можно узнать из работ [13], [14], [17], [18], [19], [20], [23], [26], [28], [29], [30], [31], [32], [33], [34]. О применениях операд в алгебраической топологии, кроме книг [4], [10] и [32], можно узнать из монографии [12], а что касается математической физики, то введением может служить книга [32]. Известно также, что готовится книга *Algebraic Operads* (авторы — Jean-Louis Loday и Bruno Valette). Судя по всему, эта книга по содержанию должна существенно отличаться от нашей работы. Среди работ, которые можно отнести к алгебраической теории операд, преобладают работы по линейным операдам (это направление в нашей работе представлено главами 4 (отчасти) и 5, и двумя параграфами главы 6). Отметим, что в последнее время в России было защищено несколько диссертаций, так или иначе связанных с теорией мультикатегорий и операд: это кандидатские диссертации А.В.Семеновой, В.В.Доценко, А.С.Хорошкина, И.А.Долгунцевой, а также докторская диссертация П.С.Колесникова [5].

Существенное отличие нашей работы от работ других авторов состоит в том, что в ней изучаются мультикатегории и операды более общего, чем обычно, вида — мультикатегории и операды над *вербальными категориями*. Понятие вербальной категории было введено автором в 2002-м году в работе [39]. Позднее выяснилось, что нечто похожее (в очень сжатом виде) появилось также в статье 2005-го года [22] (по словам автора [22], подготовленной еще в 1972-м году), но идея, заключенная в этой работе, дальнейшего развития, по-видимому, не получила. Наша работа в некоторой степени восполняет этот пробел.

Цели и методы исследования. Основной целью было построение основ общей теории многообразий алгебр и супералгебр над операдами (в многосортном случае — над мультикатегориями), и нахождение соотношения между теорией произвольных мультиоператорных алгебр, и теорией алгебр над операдами. Кроме того, выяснялось, насколько далеко можно продвинуть аналогию между категориями и мультикатегориями (введено и исследовано понятие естественного мультипреобразования мультифункторов), и существует ли для операд понятие, аналогичное понятию кольца частных (оказалось, что в одном важном частном случае существует). Поимо этого, было несколько целей второго плана, связанных с построением и исследованием ряда интересных операд, и описанием алгебр над этими операдами.

В соответствии с этими целями в работе применяются методы универсальной (общей) алгебры и методы теории категорий.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

- Концепция операд и мультикатегорий над вербальными категориями;

- Группа результатов, описывающих положение операд и многообразий алгебр над ними в теории многообразий универсальных алгебр.

В самом сжатом виде суть можно выразить так: вся теория многообразий универсальных алгеб — это, с точностью до рацональной эквивалентности, теория многообразий алгебр над операдами (над теми или иными вербальными категориями);

- Принцип классификации тождеств универсальных алгебр в соответствии с вербальными категориями. Точнее, каждой вербальной категории соответствует полный аналог всей традиционной универсальной алгебры, где есть свои многообразия, и свои операды, этот аналог можно представить внутри традиционной алгебры, и классифицировать многообразия и тождества в соответстии с принадлежностью к образу того или иного аналга;

- Понятие коммутативной операды (обобщение понятия коммутативной алгебраической теории), и концепция Z-линейных алгебр и Z-линейных операд (где Z — коммутативная операда), позволяющая с единых позиций рассматривать случаи нелинейных и линейных (в обычном смысле) универсальных (мультиоператорных) алгебр. Основной результат здесь состоит в том, что многообразие Z-линейных алгебр определяется Z-полилинейными тождествами тогда и только тогда, когда оно рационально эквивалентно многообразию алгебр над симметрической Z-линейной операдой;

- Концепция мультиоператорных супералгебр и супералгебр над операдами. Группа результатов, которые можно рассматривать в качестве основы общей теории всех возможных супералгебр и их представлений;

- Понятие естественного мультипреобразования мультифункторов и его применения. В частности, описана структура мультикатегорий мультифункторов и комма-мультикатегорий. В рамках этого круга идей и результатов коммутативные операды описываются как центры мультикатегорий;

- Конструкция "алгебраических теорий частных" (алгебраические теории оказываются по-сути одной из разновидностей операд над вербальными категориями) и ее обобщение на произвольные категории частных;

- Конструкция операды матриц над произвольной линейной операдой, и результат о том, что данная линейная симметрическая операда, и операда конечных матриц над ней Морита-эквивалентны;

- Конструкция операд многомерных “кубических” матриц, и тесно связанные с ней конструкции операд разнообразных графов, позволяющие рассматривать теорию графов как часть универсальной алгебры;

- Многочисленные примеры других новых операд, в частности, операдные аналоги алгебр инцидентности (обычных и редуцированных), операды симплексов, многомерных сфер и родственных им объектов, операды многомерных стохастических и двоякостохастических матриц. Описания многообразий алгебр над некоторыми из этих операд.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми. Новыми являются также понятия вербальной категории, операды (и мультикатегории) над вербальной категорией, понятия естественного мультипреобразования мультифункторов, коммутативной операды, супералгебры над операдой, и ряд других понятий и конструкций. Новыми также можно считать и методы исследования, использующие эти понятия и конструкции.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Методы и результаты работы могут быть использованы для дальнейших исследований в области теории операд и мультикатегорий, в теории категорий (прежде всего в теории категорий частных и их приложений), в области теории многообразий алгебр и супералгебр, в теории графов и гиперграфов, в некоторых разделах геометрии и топологии, а также в теории вероятностных автоматов.

Апробация работы. Результаты работы докладывадись на IV Всесоюзной школе “Алгебры Ли и их применения в математике и физике”, посвященной 80-летию со дня рождения профессора В.В.Морозова, на международной научной конференции “Алгебра и анализ”, посвященной 100-летию со дня рождения Н.Г.Чеботарева, на научной школе-конференции “Алгебра и анализ”, посвященной 100-летию со дня рождения Б.М.Гагаева, на научной школе-конференции “Теория функций, ее приложения и смежные вопросы", посвященной 130-летю со дня рождения Д.Ф.Егорова, на международной научной конференции "Актуальные проблемы математики и механики", просвященной 40-летию механико-математического факультета КГУ, на международной научной конференции "Алгебра и анализ-2004", поссвященной 200-летию Казанского государственного университета.

Результаты работы также докладывались на заседаниях Казанского Математического общества и на семинарах кафедры алгебры и математической логики Казанского университета.

Публикации. Результаты данной работы опубликованы в тринадцати статьях в журналах из списка ВАК [35] – [47], а также в работе [48], и анонсировались в одиннадцати заметках [49] – [59].

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, семи глав, насчитывающих в общей сложности 35 параграфов, и списка литературы. Текст подготовлен в издательской системе $\LaTeX\,2_{\varepsilon}$, и имеет объем в 350 страниц. Список литературы состоит из 162 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

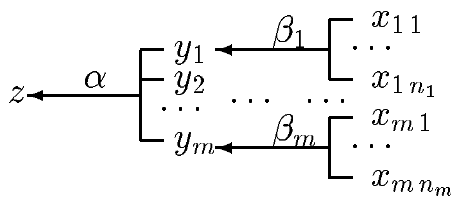
Начнем с определения многосортного варианта понятия операды — мультикатегории. Мультикатегория — это такое обобщение категории, в котором "стрелки"(морфизмы) имеют не одно "начало" (объект), а несколько. Точное определение таково. *Мультикатегория* (или S*-операда*) R есть следующий комплекс данных. Во-первых, задан класс "объектов" $S = \mathrm{Ob}(R)$. Далее, для каждого непустого слова $\overline{x} = x_1 \dots x_n$ в алфавите S, и объекта $y \in S$, определено множество мультиморфизмов (или мультистрелок) $R(\overline{x}, y)$. Наконец, для непустых множеств мультистрелок определена операция композиции:

$$R(y_1 \dots y_m, z) \times R(\overline{x}_1, y_1) \times \dots \times R(\overline{x}_m, y_m) \longrightarrow R(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m, z),$$

которая будет обозначаться следующим образом:

$$(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_m) \mapsto \alpha\beta_1 \dots \beta_m\omega = \alpha\overline{\beta}.$$

Здесь $\overline{x}_i = x_{i1}x_{i2} \dots x_{in_i}$, $\beta_i \in R(\overline{x}_i, y_i)$, $1 \leq i \leq m$, $\alpha \in R(y_1 \dots y_m, z)$. Это можно представлять следующим образом в виде картинки:



Операция композиции должна удовлетворять следующим свойствам.

1) (Ассоциативность). Для тех наборов стрелок, для которых композиции существуют (здесь $\overline{\gamma}_i = \gamma_{i\,1} \dots \gamma_{i\,n_i}$), имеет место равенство:

$$(\alpha\beta_1\beta_2 \dots \beta_m)(\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_2 \dots \overline{\gamma}_m) = \alpha(\beta_1\overline{\gamma}_1)(\beta_2\overline{\gamma}_2)\dots(\beta_m\overline{\gamma}_m)$$

2) (Существование единиц). Для каждого объекта $x \in S$ в $R(x,x)$ существует стрелка 1_x, и для любой стрелки $\omega \in R(x_1x_2 \dots x_m, y)$ должны выполняться соотношения $\omega 1_{x_1}1_{x_2}\dots 1_{x_m} = \omega = 1_y\omega$.

Если для всех $\overline{x} = x_1 \dots x_n$, где $n > 1$, множества $R(\overline{x}, y)$ пусты, то мультикатегория — это то же самое, что категория. Если же класс объектов $\mathrm{Ob}(R)$ состоит из одного элемента, то такая мультикатегория называется (несимметрической) *операдой.*

Для того, чтобы дать определение мультикатегории (и операды) в полной общности, нам потребуется понятие вербальной категории. Изучению вербальных категорий посвящена первая глав диссертации. В односортном случае вербальная категория — это подкатегория (с теми же объектами) категории $FSet$, объекты которой — множества $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$, а морфизмы — все возможные отображения, которые переводят в 0 элемент 0, и только его. В этой категории естественным образом опеределены конечные копроизведения. Первое требование к вербальной категории — она должна быть замкнута относительно взятия копроизведения любых своих двух морфизмов. Далее надо рассмотреть подкатегорию P категории $FSet$, морфизмы которой — всевозможные неубывающие отображения. Рассмотрим некоторый морфизм $f : [k] \to [m]$, принадлежащий вербальной категории W, и произвольный морфизм $\alpha : [n] \to [m]$ из категории P. Второе (и последнее) условие, характеризующее вербальную категорию W, заключается в том, что в диаграмме расслоенного произведения

$$\begin{tikzcd}
{[n] \times_{[m]} [k]} \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & {[k]} \arrow[d, "f"'] \\
{[n]} \arrow[r, "\alpha"] & {[m]}
\end{tikzcd}$$

где проекцию π_2 можно считать неубывающим отображением, проекция π_1 должна быть морфизмом категории W. Главным результатом первой главы можно считать приведенное в § 1.2 описание свойств решетки вербальных подкатегорий и, в частности, построение счетного класса нетривиальных примеров вербальных категорий. Те примеры, которые обнаруживаются сразу — это сама категория $FSet$, а также категория Σ, классом морфизмов которой является семейство всех биективных отображений из $[n]$ в $[n]$, категория Epi, классом морфизмов которой является класс всех сюръективных морфизмов из $FSet$, и категория Mon, морфизмы которой — всевозможные инъективные отображения из $FSet$. Категория WId, морфизмами которой являются только тождественные отображения, также является вербальной. Если считать $FSet$ и WId тривиальными вербальными категориями, то оказывается, что Mon и Epi — максимальные нетривиальные вербальные категории, Σ — минимальная нетривиальная вербальная категория, между Mon и Σ нет вербальных подкатегорий (но есть пример вербальной подкатегории категории Mon, не содержащей Σ), а между Epi и Σ существует не менее чем счетное множество примеров вербальных категорий. В последнем, третьем параграфе главы определяются и изучаются многосортные обобщения вербальных категорий. Выясняется, что многосортные вербальные категории в конечном счете сводятся к односортным, так что ничего принципиально нового не возникает. Вербальные категории (как подкатегории категории конечных ординалов) образуют не менее чем счетную полную решетку. В многосортном случае получается та же самая решетка, не зависящая от множества сортов.

В начале второй главы дается определение мультикатегории R над вербальной категорией W. Часть определения, не зависящая от вербальной категории, уже была приведена выше. Суть дальнейшего заключается в следующем. Если $f : [m] \to [n]$ — морфизм категории W, и $\omega \in R(x_{f(1)} \dots x_{f(m)}, y)$, то определена мультистрелка (мультиморфизм)

$\omega f : x_1 \dots x_n \to y$ из $R(x_1 \dots x_n, y)$, и эта операция удовлетворяет ряду свойств, явный вид которых для понимания основных результатов данной работы не является существенным. В случае, когда $W = \Sigma$, получается известное определение симметрических мультикатегорий (или операд). Именно этот случай и является предметом изучения в подавляющем числе работ других авторов. Изучается также случай $W = WId$, соответствующий так называемым несимметрическим операдам (или мультикатегориям). В нашей работе рассматриваются мультикатегории и операды над произвольными вербальными категориями.

Следует заметить, что в последнее время у ряда авторов термин "мультикатегория" используется в значительно более широком категорном смысле (см. подробности, например, в [26]). Однако такие более общие мультикатегории не связаны непосредственно с универсальной алгеброй, и поэтому в нашей работе не рассматриваются.

Общая теория мультикатегорий и операд — это достаточно молодая математическая теория, ее история насчитывает лишь около сорока лет (хотя имеется и предыстория примерно такой же протяженности). Одно из возможных направлений дальнейшего развития связано с обобщением понятий теории категорий и с переносом теорем теории категорий на мультикатегорный случай. Сами же авторы теории категорий считали основным понятием своей теории понятие естественного преобразования. *"Как впервые отметили Эйленберг и Маклейн, категория была определена, чтобы можно было определить функтор, а функтор — чтобы можно было определить естественное преобразование"*. [7, с.30].

Центральная темы, изучаемая во второй главе нашей работы — это понятие *естественного мультипреобразования мультифункторов*. Его можно определить во всех случаях, когда рассматриваемые мультикатегории определены над вербальной категорией W, содержащей Σ (среди известных примеров вербальных категорий таких большинство), а мультифункторы сохраняют действие W. Приведем точное определение.

Расссматривается вербальная категория W, содержащая Σ. Особую роль будут играть отображения $\sigma_{n,m} \in \Sigma_{nm}$, определенные для всех натуральных $n, m \geq 1$ следующим образом. Пусть $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Тогда произвольное число из множества $\{1, \dots, nm\}$ можно однозначно представить либо в виде $j + (i-1)m$, либо в виде $i + (j-1)n$ для подходящих i,j. Положим $\sigma_{n,m}(i+(j-1)n)=j+(i-1)m$. Тогда для произвольного класса S в многосортной вербальной категории W_S, соответствующей односортной вербальной категории W можно интерпретировать $\sigma_{n,m}$ как морфизм из $x_{1,1}\dots x_{1,m}\dots x_{n,1}\dots x_{n,m}$ в $x_{1,1}\dots x_{n,1}\dots x_{1,m}\dots x_{n,m}$. В самом деле, пусть $\overline{v}=v_1\dots v_{nm}=x_{1,1}\dots x_{1,m}\dots x_{n,1}\dots x_{n,m}$, так что $x_{i,j}=v_{i+(j-1)n}$. Аналогично, если $\overline{u}=u_1\dots u_{nm}=x_{1,1}\dots x_{n,1}\dots x_{1,m}\dots x_{n,m}$, то $x_{i,j}=u_{j+((i-1)m}$. Если $f:\overline{v}\to\overline{u}$ — морфизм из W_S, то должно быть $v_k=u_{f(k)}$. Если $f=\sigma_{n,m}$, $k=i+(j-1)n$, то $u_{\sigma_{n,m}(k)}=u_{j+(i-1)m}=x_{i,j}=v_k$. Очевидно, что если либо n, либо m равно единице, то $\sigma_{n,m}$ есть тождественное отображение, и для любых n,m имеет место равенство $\sigma_{n,m}=\sigma^{-1}_{m,n}$.

Пусть K — мультикатегория над W. Тогда по определению существуют отображения

$$\sigma_{n,m}:K(x_{1,1}\dots x_{1,m}\dots x_{n,1}\dots x_{n,m},z)\longrightarrow K(x_{1,1}\dots x_{n,1}\dots x_{1,m}\dots x_{n,m},z),$$

сопроставляющие мультистрелкам ω мультистрелки $\omega\sigma_{n,m}$.

Определение. Пусть даны две мультикатегории R и K над вербальной категорией W, и мультифункторы $A_1,\dots,A_n,B:R\longrightarrow K$. Определим *естественное мультипреобразование* (или *мультиморфизм мультифункторов*) λ из строки $\overline{A}=A_1\dots A_n$ в B (обозначение $\lambda:\overline{A}\to B$) как следующий комплекс данных. Для любого $x\in\mathrm{Ob}(R)$ задается элемент $\lambda_x\in K(A_1(x)\dots A_n(x),B)$, и для каждого $\omega\in R(x_1\dots x_m,y)$ имеет место равенство:

$$\lambda_y A_1(\omega)\dots A_n(\omega)=B(\omega)\lambda_{x_1}\dots\lambda(x_n)\sigma_{n,m}$$

В случае $n=1,m=1$ определение естественного мультпреобразования сводится к определению обычного естественного преобразования функторов.

Используя естественные мультипреобразования, в § 2.2 показывается, что класс мультифункторов из одной мультикатегории в другую мультикатегорию (над данной вербальной категорией W) сам обладает естественной структурой W-мультикатегории. Таким образом, получается обобщение категорий функторов, играющих существенную роль и в алгебре, и в теории категорий (в частности, в теории топосов). В § 2.3 строится мультикатегорный аналог важной для теории категорий конструкции комма-категорий (категории-запятой в русском переводе книги

[7]). У нас этот аналог называется *комма-мультикатегорией*. Показывается, что, как и в категорном случае, задание естественного мультипреобразования равносильно заданию некоторого мультифунктора в комма-мультикатегорию.

Тема § 2.4 — общее определение алгебры над мультикатегорией как мультифунктора из данной мультикатегории R в другую мультикатегорию $\mathcal{M}K$, которая естественным образом строится по строго моноидальной категории K. Объектами $\mathcal{M}K$ являются объекты K, а $\mathcal{M}K(x_1 \dots x_m, y) = K(x_1 \otimes \dots \otimes x_m, y)$. Выясняется, каким условиям должна удовлетворять эта строго моноидальная категория K, чтобы на мультикатегории всех мультифункторов из R в $\mathcal{M}K$ (т.е. R-алгебр) можно было определить структуру W-мультикатегории. В этом же параграфе строится ряд друих важных для дальнейшего примеров мультикатегорий.

Подмультикатегорию мультикатегории мультифункторов с одним объектом — некоторым мультифунктором — естественно назвать операдой эндоморфизмов данного мультифунктора (операдой — поскольку это мультикатегория с одним объектом). Известные операды эндоморфизмов действительно являются очень частными случаями этой общей конструкции. В § 2.5 начато изучение другого частного случая — операды эндоморфизмов тождественных мультифункторов, которые естественно назвать *центрами* соответствующих мультикатегорий. Дана внутренняя характеризация этих операд, которые названы *коммутативными операдами*. Коммутативными являются многие важные операды. Коммутативные операды играют важную роль в дальнейших главах данной работы.

Понятие вербальной категории позволяет расширить как границы теории операд, так и границы традиционной теории многообразий универсальных алгебр. Ситуацию можно в первом приближении описать следующим образом. С каждой вербальной категорией связан особый класс "сигнатур" Set^W — функторов из данной с помощью которого можно определить некий аналог всей теории "обычных" универсальных алгебр. При этом "обычные" универсальные алгебры — это случай тривиальной вербальной категории WId. Таким образом, каждой вербальной категории соответствует полный аналог всей традиционной универсальной алгебры, в котором есть свои тождества, свои многоообразия, и свои операды (операды над данной вербальной категорией). Все эти аналоги традиционных объектов можно интерпретировать внутри традиционной универсальной алгебры с помощью естественно возникающих "забывающих" функторов $Set^W \to Set^{WId}$. Это дает, в частности, некий способ крупномасштабной классификации тождеств: классы тождеств соответствуют вербальным категориям. В частности, полилинейные тождества соответствуют вербальной категории Σ, все морфизмы которой биективны, а все возможные тождества соответствуют максимальной вербальной категории. Все это подробно показано в третьей главе данной работы. При этом важную роль играет понятие рациональной эквивалентности многообразий, введенное в 1959-м году А.И. Мальцевым (см. [8], [11, глава 1]). Неформально говоря, два многообразия *рационально эквивалентны*, если алгебры одного многообразия и алгебры другого — это одни и те же множества, и операции, которые определяют структуру алгебр различных двух многообразий на этих (совпадающих) множествах, можно выразить друг через друга. Аналогичное понятие можно определить и для многосортных универсальных алгебр. Рационально эквивалентные многообразия — это в некотором смысле "одно и то же" многообразие, только представленное с помощью различных эквивалентных друг другу наборов операций (сигнатур).

В § 3.1 установлена связь между $FSet$-операдами и абстрактными клонами. Оказалось, что эти понятия равносильны (с точностью до рациональной эквивалентности). По каждому абстрактному клону строится $FSet$-операда, и наоборот, по каждой $FSet$-операде строится абстрактный клон. Соответствие взаимно-однозначно. При этом многообразия алгебр над $FSet$-операдой и над соответствующим ей абстрактным клоном рационально эквивалентны. Отметим, что понятие абстрактного клона, в свою очередь, эквивалентно понятию Ловеровской алгебраической теории [25], причем задание абстактного клона (как и алгебраической теории) равносильно заданию категории свободных алгебр с конечными базисами в многообразии алгебр над данным клоном. Результаты § 3.1 можно интерпретировать следующим образом: вся теория абстрактных клонов (и равносильных им объектов) является, по-сути, частью теории операд над вербальными категориями.

Отметим, что наличие связи между тем, что позднее было названо операдами, и абстрактными клонами, ощущалась (судя по названию работы) еще автором [2]. Значительно позднее, в 2006-м году, появилась статья [27], в которой была сделана попытка выяснить соотношение между (ловеровскими) алгебраическими теориями и операдами. Поскольку в распоряжении автора этой работы были только симметрические и несимметрические операды, то полного решения, разумеется, не получилось. Судя по всему, автор [27] не был знаком с нашей более ранней работой [39], где задача была решена полностью. В том же 2006-м году появилась работа [16], где также обсуждалась связь между операдами и клонами, но и в ней дело ограничивается симметрическими и несимметрическими операдами. Работа [22] в [16] упоминается, но интересующая нас тема вербальных категорий остается вне поля зрения автора.

Далее в нашей работе (в § 3.2) описываются свободные алгебры в многообразии $\mathrm{Alg}(R_W)$ алгебр над произвольной W-операдой R.

В § 3.3 получены следующие результаты. Сначала доказывается, что, если R есть $FSet$-мультикатегория с классом объектов S, то для каждого семейства $s_1, \dots, s_n \in S$ семейство $\{R(s_1 \dots s_n, t) | t \in S\}$ есть свободная алгебра с базисом из n элементов (соответствующих $s_1, \dots, s_n$) в многообразии R-алгебр. Это семейство останется алгеброй (но уже не обязательно свободной), даже если R есть Epi-мультикатегория. С другой стороны, если M — произвольное многообразие многосортных алгебр, то семейство свободных конечно порожденных свободных алгебр этого многообразия можно превратить в $FSet$-мультикатегорию. Показано, что многообразие M рационально эквивалентно многообразию алгебр над этой мультикатегорией. Таким образом, в данном параграфе получены (в конечном счете) и мультикатегорные аналоги результатов § 3.1, но без использования понятия абстрактного клона.

Таким образом, в первом приближении вся теория универсальных алгебр рассматриваемая “по модулю” рациональной эквивалентности — это теория алгебр над операдами (в многосортном случае — над мультикатегориями). Можно даже сказать, что соотношение между теорией многообразий алгебр над операдами и классической теорией многообразий мультиоператорных алгебр (определяемых традиционно с помощью символов операций и тождеств) носит примерно такой же характер, как и соотношение между общей теорией групп и комбинаторной теорией групп. При этом почти исчезает грань между универсальной алгеброй и теорией категорий: и то, и другое включается в более общую теорию мультикатегорий как частные случаи.

В § 3.4 по произвольной вербальной категории W строится W-операда OW (в многосортном случае — мультикатегория). Получается, таким образом, обширный класс примеров мультикатегорий и операд, большей частью ранее неизвестных. В этот же класс входит и операда, n-й компонентой которой является группа подстановок n-й степени Σ_n. Далее вычислены (с точностью до рациональной эквивалентности) многообразия алгебр над операдами и мультикатегориями вида OW. Оказалось, что, например, для операд это во всех случаях одно и то же многообразие — многообразие всех полугрупп с единицей. В мультикатегорном случае получаются его многосортные аналоги полугрупп с единицей, зависящие только от множества сортов, но не от вербальной категории W.

Метод, использованный в § 3.4 для построения операд вида OW, используется в § 3.5 для построения свободных W-операд. Пусть W — некоторая вербальная категория, R — некоторая WId-операда. Определим семейство $RW = \{RW(n)|n = 0, 1, 2, \dots\}$ следующим образом:

$$RW(n) = \coprod_{m>=0} R(m) \times W(m, n)$$

Для каждого n определено отображение $\eta_n : R(n) \to RW(n)$, сопрставляющее элеименту $a \in R(n)$ элемент $(a, id) \in R(n) \times W(n, n)$. Через $\eta : R \to RW$ обозначим все семейство отображений η_n. Определенное только что семейство RW является W-операдой, а семейство η — гомоморфизмом WId-операд. При этом выполняется следующее универсальное свойство. Для любой W-операды O и произвольного гомоморфизма WId-операд $\xi : R \to O$ существует, притом только один, гомоморфизм W-операд $\rho : RW \to O$ такой, что $\xi = \rho\eta$. При доказательстве этого используются результаты § 3.4. Обозначим через $\mathcal{FO}_\Omega$ свободную WId-операду с базисом Ω (фактически Ω есть некоторая сигнатура). Компонента этой операды $\mathcal{FO}_\Omega(n)$ реализуется как подмножество в абсолютно свободной Ω-алгебре $Fr_\Omega(x_1, \dots, x_n)$, состоящее из всех Ω-слов, в которые входят все элементы базиса $x_1, \dots, x_n$, причем именно в указанном порядке, и каждый элемент x_i входит в точности один раз.

Теорема 3.5.3. *Операда $\mathcal{FO}_\Omega W$ является свободной W-операдой* *с базисом* Ω.

В дальнейшем будем обозначать свободную W-операду $\mathcal{FO}_\Omega W$ через $FO_{\Omega,W}$.

Теорема 3.5.4. *Многообразия* $\mathrm{Alg}(FO_{\Omega,W})$ *и* $\mathrm{Alg}(\Omega)$ *рационально эквивалентны. В частности, можно отождествлять свободные* $FO_{\Omega,W}$*-алгебры и свободные* Ω*-алгебры.*

В частности, свободную Ω-алгебру $Fr_\Omega(X)$ можно отождествить со свободной $\mathcal{FO}_\Omega$-алгеброй с базисом X, которая устроена следующим образом:

$$Fr_{\mathcal{FO}_\Omega}(X) = \coprod_{m>=0} \mathcal{FO}_\Omega(m) \times X^m.$$

Отсюда следует, что элементы $Fr_\Omega(X)$ можно однозначно представлять в виде $w\overline{x}$ (отождествляя пару $(w,\overline{x})$ со строкой $w\overline{x}$), где $w \in \mathcal{FO}_\Omega(m)$, $\overline{x} = x_1 \dots x_m$, элементы $x_1, \dots, x_m \in X$ не обязательно различны.

В следующем § 3.6 решается вопрос о том, когда многообразие универсальных алгебр рационально эквивалентно многообразию алгебр над операдой, оперделенной над произвольной вербальной категорией W.

Элемент из $Fr_\Omega(X)^2$ будем называть W*-тождеством*, если он имеет вид $(w_1(\overline{x}f_1), w_2(\overline{x}f_2))$, где $w_i \in \mathcal{FO}_\Omega(m_i)$, $f_i \in W([m_i],[n])$, $i = 1,2$, $\overline{x} = x_1 \dots x_n$, и все $x_1, \dots, x_n \in X$ различны. При этом $\overline{x}f_i = x_{f_i(1)} \dots x_{f_i(m_i)}$.

Теорема 3.6.2. *Существует изоморфизм между решеткой конгруэнций свободной* W*-операды* $FO_{\Omega,W}$ *и подрешеткой решетки вполне инвариантных конгруэнций свободной* Ω*-алгебры* $Fr_\Omega(X)$ *со счетным базисом* X*, состоящей из конгруэнций, порожденных* W*-тождествами.*

Теорема 3.6.4. *Если* R *есть* W*-операда, то многообразие* $\mathrm{Alg}(R_W)$ *определяется* W*-тождествами.*

Теорема 3.6.5. *Если многообразие* Ω*-алгебр* M *определяется* W*-тождествами, то оно рационально эквивалентно многообразию вида* $Alg(R_W)$*, где* R *есть* W*-операда.*

Сформулированные только что результаты можно считать основой упоминавшейся выше классификации тождеств, при которой классы тождеств (W-тождества) соответствуют вербальным категориям W.

В случае мультикатегорий формулировки и доказательства совершенно аналогичны. Напомним, что в главе 1 было показано, что каждая многосортная вербальная категория однозначно строится по некоторой односортной, поэтому ничего принципиально нового не возникает.

В § 3.7 обсуждаются полученные результаты. Краткая версия этого обсуждения уже приведена выше.

Глава 4 начинается с более подробного изучения коммутативных операд. Приведем точное определение. Пусть Z — операда над некоторой вербальной категорией W, такой, что $\Sigma \subseteq W$. Назовем операду Z *коммутативной*, если для любых $\lambda \in Z(n)$, $\omega \in Z(m)$ имеет место тождество:

$$\lambda \overbrace{\omega \dots \omega}^{n} = (\omega \overbrace{\lambda \dots \lambda}^{m})\sigma_{n,m}$$

Обозначим действие элемента операды $\lambda \in Z(n)$ на элементы $a_1, \dots, a_n$ из Z-алгебры A как $\sum\limits_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} a_i$. Если операда Z коммутативна, то для любых $\lambda \in Z(n)$ и $\omega \in Z(m)$ в любой Z-алгебре имеет место тождество:

$$\sum_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} \sum_{j=1}^{m}{}^{(\omega)} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{m}{}^{(\omega)} \sum_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} a_{i,j}$$

Гомоморфизм между алгебрами над коммутативной операдой в этих обозначениях есть такое отображение h, что $h(\sum\limits_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} a_i) = \sum\limits_{i=1}^{n}{}^{(\lambda)} h(a_i)$ для любого $\lambda \in Z(n)$ и вевозможных $a_1, \dots, a_n$. Таккие гомоморфизмы естественно называть *Z-линейными отображениями*. Как уже было сказано выше, коммутативные операды — это центры мультикатегорий в том же смысле, в каком, например, коммутативные ассоциативные кольца являются центрами предаддитивных категорий. В первом параграфе главы 4 показано также, что частными случаями коммутативных операд фактически являются давно известные коммутативные ловеровские алгебраические теории (см. [15, Definition 3.10.1, p.166]). Точнее, ввиду результатов § 3.1 имеет место рациональная эквивалентность между коммутативными $FSet$-операдами, и теми абстрактными клонами, которые соответствуют коммутативным алгебраическим (ловеровским) теориям. Многообразия алгебр над коммутативными операдами в некотором смысле походят на категории модулей над коммутативными кольцами. В частности, для алгебр над коммутативными операдами можно определить полилинейные отображения и тензорные произведения. Примерами многообразий алгебр над коммутативными операдами являются категории модулей над коммутативными кольцами, а также вся категория множеств. Многообразие алгебр над коммутативной операдой Z оказывается удобным для построения (по аналогии с теорией линейных мультиоператорных алгебр) теории Z-линейных мультиоператорных алгебр, в частности, алгебр, определяемых Z-полилинейными тождествами. При этом появляется возможность объединения в одну теорию теорий нелинейных и линейных универсальных алгебр, ранее развивавшихся достаточно изолированно друг от друга. Все это также изложено в § 4.1.

В следующем параграфе развивается теория Z-линейных операд Z-линейной называется такая Σ-операда R, каждая компонента которой $R(n)$ есть алгебра над коммутативной W-операдой Z (при этом категория W не обязана совпадать с Σ), а операции композиции

$$R(m) \times R(n_1) \times \cdots \times R(n_m) \longrightarrow R(n_1 + \cdots + n_m)$$

являются Z-линейными по всем тем аргументам из $R(k)$, для которых $k \neq 0$. Алгебры над такими операдами естественно считать также Z-алгебры, а операции $R(m) \times A^m \to A$, определяющие на A структуру R-алгебры, естественно $n > 0$ считать Z-линейными по каждому аргументу (т.е. Z-полилинейными).

Основной результат главы 4 таков: многообразие мультиоператорных Z-линейных алгебр определяется Z-полилинейными тождествами тогда и только тогда, когда оно рационально эквивалентно многообразию алгебр над Z-линейной симметрической операдой. Этот результат вместе со всем комплексом соответствующих понятий и определений почти дословно переносится на случай мультикатегорий. Это сделано в § 4.4 и § 4.5. В параграфе 4.4 вычисляются в явном виде две категории (многообразия) алгебр над Z-линейными мультикатегориями специального вида. Одна из них строится по строго моноидальной категории, другая — по произвольной категории.

Результаты четвертой главы позволяют сделать вывод, что использование коммутативных операд дает возможность развивать на единой основе и теорию нелинейных, и теорию линейных мультиоператорных алгебр, которые до сих пор излагались отдельно друг от друга (см., например, изложение теории линейных мультиоператорных алгебр в [6] и [3]). В нелинейном случае надо просто взять за основу многообразие алгебр над коммутативной операдой, первая компонента которой состоит из одного элемента, а остальные пусты (категория алгебр над такой операдой эквивалентна категории множеств), а в линейном случае берется другая коммутативная операда, которая строится по коммутативному ассоциативному кольцу с единицей, и алгебры над такой операдой — это фактически (то есть с точностью до рациональной эквивалентности) модули над данным кольцом. Но, разумеется, имеется огромное количество других коммутативных операд.

В пятой главе строится теория мультиоператорных супералгебр. Традиционная супералгебра — это $\mathbb{Z}_2$- градуированный модуль над коммутативным ассоциативным кольцом с единицей, с заданной на нем бинарной билинейной операцией $x \cdot y$, обладающей свойством: если x, y — однородны, и $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ — их степени (элементы множества $\{0, 1\}$), то $x \cdot y = -(-1)^{\widetilde{x}\widetilde{y}} y \cdot x$. К этому тождеству добавляются другие, характеризующие супералгебру как объект из того или иного многообразия (ассоциативных, лиевских, йордановых и т.п.) супералгебр. Возможно ли такое обобщение этого определения, которое приводило бы к теории, подобной теории линейных мультиоператорных алгебр в духе работ [6] и [3]? Наш ответ на этот вопрос положителен. При этом оказывается, что у каждого многообразия "обычных" линейных мультиоператорных алгебр, определяемых полилинейными тождествами, имеется "супер"аналог. Имеется также аналог грассмановой оболочки супералгебры для самого общего случая, который обладает точно таким же "классифицирующим" свойством, что и в случае супералгебр с одной бинарной операцией.

Опишем вкратце содержание главы 5. В § 5.1 описывается способ построения многообразий супералгебр для произвольной сигнатуры Ω. Основой для определения супералгебр в таком общем случае является предположение о том, что на множестве n-арных операций Ω_n действует справа группа подстановок n-й степени Σ_n, а также наличие особого левого действия группы Σ_n на n-й тензорной степени $\mathbb{Z}_2$ - градуированного модуля L над коммутативным кольцом. Используя это определение, можно развивать теорию тождеств и многообразий линейных Ω-супералгебр аналогично тому, как это делается для линейных Ω-алгебр. В частности, вводится понятие полилинейного тождества. Если рассматриваются алгебры над полем нулевой характеристики, то любое многообразие Ω-супералгебр определяется полилинейными тождествами (для линейных Ω-алгебр это хорошо известный факт).

В § 5.2 вводится понятие супералгебр над линейными Σ-операдами (или симметрическими операдами). Отметим, что рассматриваются только симметрические и (иногда) несимметрические операды. Далее строится $\mathbb{Z}_2$-градуированный аналог "операды эндоморфизмов", которая впервые появилась, по-видимому, в работе [2]. Это позволяет определить понятие супералгебры над операдой. Показано, что многообразие супералгебр (в смысле § 5.1) над линейной симметрической операдой определяется полилинейными тождествами, и что известные типы супералгебр (коммутативные, ассоциативные, лиевские, йордановы, альтернативные, супералгебры Мальцева) получаются как супералгебры над операдами, соответствующими многообразиям соответственно коммутативных, ассоциативных, лиевских, иордановых и альтернативных алгебр.

В § 5.3 доказывается, что многообразие супералгебр определяется полилинейными тождествами тогда и только тогда, если оно рационально эквивалентно многообразию супералгебр $\mathrm{SAlg}(R)$ для некоторой линейной симметрической операды R. Этот результат аналогичен основному результату главы 4. В § 5.4 вводится понятие грассмановой оболочки для супералгебр над произвольной линейной операдой, и показывается, что традиционный способ определения принадлежности супералгебры к тому или иному многообразию в случае традиционных супералгебр с одной бинарной операцией умножения равносилен тому способу определения многообразий супералгебр, который был введен в § 5.1 и § 5.2. В общем случае использование грассмановой оболочки позволяет установить связь между многообразием $\mathrm{SAlg}(R)$ супералгебр над операдой R, и многообразием $\mathrm{Alg}(R)$ алгебр над этой же операдой. В § 5.5 вводится и исследуется операдный аналог представления супералгебр — модули над алгебрами над операдами. В отличие от представлений традиционных супералгебр, которые удается определить только в некоторых случаях, модули над супералгебрами над операдами существуют всегда, и эквивалентны представлениям традиционных супералгебр в тех случаях, когда те существуют. Всегда определен также аналог универсальной обертывающей супералгебры. Доказаны некторые свойства модулей над супералгебрами. В частности, получены аналоги результатов из § 5.4.

В главе 6 собран ряд результатов, относящихся к разнообразным операдам более специального вида. Общим для большей части этих результатов можно считать использование различных матричных конструкций. Результаты данной главы показывают, что область возможных приложений теории операд весьма широка.

В § 6.1 изучаются структуры операд, которые можно естественным путем определить на различных множествах помеченных гиперграфов или графов. Вначале строятся два бесконечных семейства операд, обозначаемых через GM_n, $n = 1, 2, \ldots$, которые можно назвать операдами многомерных кубических матриц. Общее определение занимает довольно много места, поэтому опишем лишь два частных случая, При $n = 1, 2$ получим следующее. Пусть G — некоторый моноид, $[m] = \{1, \ldots, m\}$. Элементы $GM_1(m)$ — отображения вида $A : [m] \to G$. Их можно интерпретировать как упорядоченные последовательности вида $(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i = A(i)$. Если $B_i \in GM_1(k_i)$ записать как $(b_{i,1}, \ldots, b_{i,k_i})$, то операция композиции выглядит так:

$$AB_1 \ldots B_m = (a_1 b_{1,1}, \ldots, a_1 b_{1,k_1}, \ldots , a_m b_{m,1}, \ldots, a_m b_{m,k_m}) \qquad (*)$$

В случае $n = 2$. компонента $GM_2(k)$ есть множество всех квадратных $k \times k$-матриц с элементами из G. Обозначим нейтральный элемент G через 0, и будем рассматривать только матрицы, на диагонали которых стоят нули. Явный вид композиции в этой операде таков. Пусть $A \in GM_2(n)$, $B_1 \in GM_2(k_1), \ldots , B_m \in GM_2(k_m)$. Тогда

$$AB_1 \ldots B_m = \begin{pmatrix} B_1 & \overline{a}_{1,2} & \ldots & \overline{a}_{1,m} \\ \overline{a}_{2,1} & B_2 & \ldots & \overline{a}_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{m,1} & \overline{a}_{m,2} & \ldots & B_m \end{pmatrix}.$$

Здесь $AB_1 \ldots B_m$ — блочная $k \times k$-матрица, i, j-й блок которой есть матрица размером $k_i \times k_j$. Диагональные блоки — квадратные матрицы B_i, $1 \leq i \leq m$. Если $i \neq j$, и $a_{i,j}$ — i, j-й элемент матрицы A, то $\overline{a}_{i,j}$ обозначает матрицу размером $k_i \times k_j$, целиком заполненную одним и тем же элементом $a_{i,j}$.

Далее строится Σ-операда, элементами которой являются неориентированные конечные помеченные графы (операда ориентированных строится точно так же), и показывается, что с помощью матриц инцидентности можно вложить эту операду в GM_2. Затем исследуется вопрос о разложимости и неразложимости графов в операдную композицию. Произвольный конечный помеченный граф раскладывается в операдную композицию операдно неразложимых (простых) графов, но в общем случае это представление неоднозначно. Аналогичные разультаты имеют место и для простых ориентированных графов. Затем эта ситуация несколько конкретизируется для случая операды турниров. Получено описание всех подоперад этой операды, порождаемых простыми турнирами.

Смысл всего этого состоит в том, что теория графов (и — пока — отчасти гиперграфов) в ряде отношений оказывается, по-сути, разделом алгебры: многие интересные совокупности графов являются операдами относительно введенных операдных композиций. Идея превращения множеств графов, гиперграфов, решекток (и т.п. объектов) была анонсирована в [54], а конструкции GM_2 и HG_2 появились в [40]. Позднее выяснилось, что конструкции, похожие на нашу операдную композицию, в том или ином виде известны в теории графов, но язык операд в теории графов до наших работ не использовался.

В § 6.2 изучаются матричные линейные операды, введенные в [36]. Эти операды являются обобщениями операд тензоров, в которых композиция есть свертка. В статье [36] использовались правые операды, и этот язык сохранен и в данной главе. Приведем определение матричных операд (операд многомерных матриц). Пусть R — некоторая K-линейная Σ-операда, где K — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей (возможно даже брать в качестве R полуколца). Пусть X — некоторое фиксированное множество. Рассмотрим множество $M(n) = M(X, R)(n)$, состоящее из всех отображений вида $A : X^n \times X \to R(n)$, таких, что $A(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ почти для всех наборов $x_1 \ldots x_n$ при каждом фиксированном $y \in X$. Определим операции композиции в строящейся операде следующим образом. Это отображения вида

$$M(n_1) \times \cdots \times M(n_k) \times M(k) \longrightarrow M(n_1 + \cdots + n_k),$$

сопоставляющие аргументу $(A_1, \ldots, A_m, B)$ отображение $A_1 \ldots A_m B$: $X^{n_1 + \cdots + n_k} \times X \to R(n_1 + \cdots + n_k)$, определяемое равенством:

$$A_1 \ldots A_m B(\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_m, z) = \sum_{y_1, \ldots, y_m} A_1(\overline{x}_1, y_1) \ldots A(\overline{x}_m, y_m) B(y_1 \ldots y_m, z)$$

Здесь $\overline{x}_i = x_{1,i} \ldots x_{n_i,i} \in X^{n_i}$, и в правой части равенства выражение $A_1(\overline{x}_1, y_1) \ldots A(\overline{x}_m, y_m) B(y_1 \ldots y_m, z)$ означает операдную композицию в операде R.

Основной результат § 6.2 таков:

Теорема 6.2.3. *Пусть R есть K-линейная Σ-операда и X — конечное множество. Тогда категории K-линейных алгебр $\mathrm{Alg}_K(R)$ и $\mathrm{Alg}_K(M)$ эквивалентны.*

Эта теорема является первым этапом в построении общей теории эквивалентности Мориты для многообразии алгебр над операдами. Она была опубликована в [36]. Позднее тот же результат был получен в статье Капранова и Манина [21]. В § 6.2 получен также следующий результат (отсутствующий у Капранова и Манина): эквивалентность между категориями $\mathrm{Alg}_K(R)$ и $\mathrm{Alg}_K(M)$ индуцирует послойную эквивалентность расслоенных категорий модулей над алгебрами над соответствующими операдами. Напомним, что категория модулей над алгеброй над данной операдой эквивалентна категории модулей над универсальной обертывающей алгеброй данной алгебры над операдой, а эта универсальная обертывающая алгебра является ассоциативным кольцом с единицей (в случае операды, соответствующей многообразию алгебр Ли, это известная универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли). Показано также, что индуцируется изоморфизм решеток конгруэнций операд R и M, аналогично тому, который имеет место при эквивалентности Мориты для категорий модулей над кольцами.

В § 6.3 рассматривается другое приложение матричных операд, а именно, строится операдный аналог теории алгебр инцидентности, являющихся важным инструментом в современной комбинаторной теории. Построены, в частности, операдные аналоги как обычных, так и редуцированных алгебр инцидантности локально конечных частично упорядоченных мнрожеств (см. [1, главы 4 и 5]).

В § 6.4 и § 6.5 изучаются некоторые коммутативные операды, имеющие наглядную геометрическую интерпретацию. Все они являются подоперадами операды R, для которой $R(n) = \mathbb{R}^n$, а операция композиции определяется по формуле (*). Эта операда, как и все ее подоперады, является коммутативной. В § 6.4 показывается, что многообразие изучавшихся многими математиками (в том числе Л.А.Скорняковым) конвексоров (или барицентрических алгебр) рационально эквивалентно многообразию алгебр над $FSet$-операдой Δ, компоненты $\Delta(n)$ которой суть стандартные геометрические симплексы, т.е. подмножества в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, описывемые условиями:

$$\Delta(n) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_i \geq 0, x_1 + \cdots + x_n = 1\}.$$

Операда Δ является коммутативной, и поэтому, как и в главе 4, можно рассматривать разнообразные Δ-линейные Σ-операды и алгебры над ними.

В § 6.5 вводятся операды многомерных сфер и (полых) кубов, доказываются некоторые их свойства, а также строится большой класс примеров операд сходного вида, компоненты которых — некоторые геометрические объекты в многомерных евклидовых пространствах. Основной результат этого параграфа: вычислены алгебры над операдой сфер. Это операда $S = \{S(n) | n \geq 1\}$, где

$$S(n) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$

Легко проверяется, что S есть Σ-подоперада описанной выше операды R. Указан явный набор операций и тождеств для мноообразия, рационально эквивалентного $\mathrm{Alg}(S_\Sigma)$.

Таким образом, в § 6.4 и § 6.5 введены и исследованы новые алгебраические структуры на, казалось бы, давно и хорошо известных геометрических объектах.

В последнем, шестом параграфе главы примерно так же, как в § 6.2, строятся операды многомерных стохастических и двоякостохастических матриц, а также операда многомерных булевских стохастических матриц, и дается интерпретация вероятностных автоматов (см. [**?**]) как элементов некоторых алгебр над операдой многомерных стохастических матриц. Отметим, что операды и алгебры из этого параграфа Δ-линейны.

В заключительной, седьмой главе изучаются $FSet$-операды, или, что равносильно (это было показано в главе 3) Ловеровские алгебраические теории. Впрочем, часть результатов справедлива для категорий более общего вида. Сначала показывается, что если K есть некоторая категория, обладающая конечными прямыми произведениями, и Θ есть класс морфизмов этой категории, замкнутый относительно взятия суперпозиции морфизмов, и такой, что из $\theta \in \Theta$ следует $\theta \times id_X \in \Theta$ и $id_X \times \theta \in \Theta$, то категория частных $K[\Theta^{-1}]$ также обладает конечными прямыми произведениями, и канонический функтор $K \to K[\Theta^{-1}]$ сохраняет прямые произведения. Отсюда следует, что если K — Ловеровская алгебраическая теория (в том числе и многосортная), то и $K[\Theta^{-1}]$ также является Ловеровской алгебраической теорией (с тем же классом сортов, что и K), и функтор $K \to K[\Theta^{-1}]$ является морфизмом Ловеровских теорий. Таким образом, для алгебр над $FSet$-операдами существует универсальное обращение гомоморфизмов конечно порожденных свободных алгебр. Другое приложение полученного общего результата о существовании прямых проихведений в категориях частных (или равносильного результата о существовании копроизведений) — построение универсального обращения морфизмов редаддитивных категорий. Более подробно, если дана предаддитивная категория K, то по ней можно построить категорию $\mathbf{M}(K)$ матриц над K, объектами которой являются конечные упорядоченные последовательности объектов K, а морфизмами — матрицы, компонентами которых являются морфизмы K. Эта категория предаддитивна, и обладает конечными копроизведениями, совпадающими с произведениями. Если теперь взять мультипликативно замкнутое множество Θ морфизмов $\mathbf{M}(K)$, обладающее свойством $\theta \in \Theta \Rightarrow \theta \sqcup id_X \in \Theta$, $id_X \sqcup \theta \in \Theta$, то $\mathbf{M}(K)[\Theta^{-1}]$ становится предаддитивной категорией с конечными копроизведениями, совпадающими с произведениями, причем существует предаддитивная категория C, для которой $\mathbf{M}(K)[\Theta^{-1}] \cong \mathbf{M}(C)$. Эту категорию естественно обозначить через $K[\Theta^{-1}]$. Существует аддитивный функтор $K \to K[\Theta^{-1}]$, обладающий таким же универсальным свойством, как и в случае колец частных. В случае, если K — ассоциативное кольцо с единицей, $K[\Theta^{-1}]$ также является кольцом, изоморфным кольцу частных кольца K в смысле Герасимова-Малколмсона.

Отметим, что известны всего два случая, когда структуру исходной категории можно перенести на категорию частных. Первый случай — это случай, кодгда множество обращаемых морфизмов удовлетворяет исчислению частных (левых или правых). Второй случай рассмотрен в [35] и в главе 7 данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Айгнер, М. Комбинаторная теория/ М. Айгнер — М.: Мир, 1982. — 558 с.

[2] Артамонов, В.А. Клоны полилинейных операций/ В.А. Артамонов // Успехи мат. наук. — 1969. — Т. 24. — Вып. 1 . — С. 47 – 59.

[3] Баранович, Т.М. Линейные Ω-алгебры/ Т.М. Баранович, М.С. Бургин // Успехи мат. наук. — 1975. — Т. 30. — Вып. 4. — С. 61–106.

[4] Бордман, Дж. Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах/ Дж., Бордман, Р.Фогт — М.: Мир, 1977. – 408 с. (Boardman J.M., Vogt R.M. Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces. — Lecture Notes in Math. — 1973. — V. 347.)

[5] Колесников, П.С. Строение ассоциативных конформных алгебр / П.С. Колесников — Автореферат докторской диссертации. — Новосибирск, 2008. — 26 с.

[6] Курош, А.Г. Мультиоператорные кольца и алгебры / А.Г. Курош // Успехи мат. наук. — 1969. — Т. 24. — Вып. 1. — С. 3 – 15.

[7] Маклейн, С. Категории для работающего математика / С. Маклейн — М: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 352 с.

[8] Мальцев, А.И. Структурная характеристика некоторых классов алгебр / А.И. Мальцев // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 120. — № 1. — С. 29 – 32.

[9] Манин, Ю.И. Математика как метафора / Ю.И. Манин — М.: МЦНМО, 2008. — 400 с.

[10] Мэй, Дж.П. Геометрия итерированных пространств петель / Дж.П. Мэй — В книге [4], С. 267–403. (May, J.P. The geometry of iterated loop spaces / J.P. May — Lecture Notes in Mathematics, 1972.— V. 271.— 175 p.)

[11] Пинус, А.Г. Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений / А.Г. Пинус — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. — 239 с.

[12] Смирнов, В.А. Операдные и симплициальные методы в алгебраической топологии / В.А. Смирнов — М.: Факториал Пресс, 2002. – 272 с.

[13] Baez, J.C. Higher-Dimensional Algebra III: n-Categories and the Algebra of Opetopes / J.C. Baez, J. Dolan // Advances in Math. — 1998. — V. 135. — № 2. — P. 145–206.

[14] Beilinson A.A. Chiral algebras / A.A. Beilinson, V.G. Drinfeld — Providence, RI: AMS, 2004 (Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 51).

[15] Borceux F. Handbook of Categorical Algebra 2. Categories and Structures / F.Borceux — Cambridge University Press, 1994.

[16] Curien, P.-L. Operads, clones, and distributive laws / P.-L. Curien — 2006. — 21 p. (Доступно на сайте http://www.pps.jussieu.fr/∼curien).

[17] Fresse, B. Modules over Operads and Functors / B.Fresse — Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, 2009. Lecture Notes in Mathematics, V. 1967.

[18] Ginzburg, V. Koszul duality for operads / V. Ginzburg, M. Kapranov // Duke Math. J. — 1994. — V. 76. — № 1. — P. 203 – 272.

[19] Hermida, C. Representable Multicategories / C.Hermida // Advances in Math. — 2000. — V. 151. — № 2. — P. 164–225.

[20] Kapranov, M. Operads and Algebraic Geometry / M.Kapranov // Proc. Int. Congr. Math. Berlin, 1998. August 18-27. V. II: Invited Lectures. (Documenta Mathematica. Extra Volume ICM. II.– P. 277-286).

[21] Kapranov, M. Modules and Morita theorem for operads / M.Kapranov, Yu.Manin // Amer. J. Math. — 2001. — V. 123. — № 5. — P. 811–838.

[22] Kelly, G.M. On the operads of J.P.May / G.M.Kelly // Reprints in Theory and Applications of Categories. — 2005. — № 13. — P. 1–13.

[23] Kriz, I. Operads, algebras, modules, and motives / I.Kriz, J.P.May // Asterisque. — 1995. — V. 223. — P. 1 – 137.

[24] Lambek, J. Deductive systems and categories. II. Standard constructions and closed categories / J.Lambek // Lecture Notes in Math. — 1969. — V. 86. — P. 76–122.

[25] Lawvere, F.W. Functorial semantics of algebraic theories / F.W. Lawvere // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1963. — V. 50. — № 5. — P. 869–872.

[26] Leinster, T. Higher Operads, Higher Categories / T.Leinster — London Math. Soc. Lect. Notes Ser., Cambr. Univ. Press, 2003. — 410 p.

[27] Leinster, T. Are Operads Algebraic Theories? / T.Leinster // Bull. London Math. Soc. — 2006. — V. 38. —№ 2. — P. 233 – 238.

[28] Loday, J.-L. La renaissance des operades / J.-L. Loday // Asterisque. — 1996. — V. 237. — P. 47 – 74.

[29] Loday, J.-L. Encyclopedia of types of algebras / J.-L. Loday — 2007. — 127 p. (Доступно на сайте: http://www-irma.u-strasbg.fr/∼loday/).

[30] Loday, J.-L. Generalized bialgebras and triple of operads / J.-L. Loday // Asterisque. — 2008. — V. 320. — 116 p.

[31] Manin, Yu.I. Frobenius Manifolds, Quantum Cohomology, and Moduli Spaces / Yu.I.Manin — Amer.Math.Soc. Colloquium publications, V. 47, 1999. — 300 p.

[32] Markl, M. Operads in Algebra, Topology and Physics / M.Markl, S.Shnider, J.Stasheff — AMS, Math. Surveys and Monographs, V. 96, 2002. — 349 p.

[33] Markl, M. Operads and PROPs / M.Markl // Handbook of Algebra. Vol. 5. 2008. — P. 87 – 140.

[34] Operads: Proceedings of Renaissance Conferences / J.-L. Loday, J.D. Stasheff, A.A. Voronov (Eds.) — Contemporary Math. — 1997. — V. 202. — 443 p.

Работы автора по теме диссертации

[35] Тронин, С.Н. Произведения в категориях частных и универсальное обращение гомоморфизмов / С.Н. Тронин // Матем. сборник. — 1997. — Т. 188. — № 10. — С. 109 – 130.

[36] Тронин, С.Н. Матричные линейные операды / С.Н. Тронин, О.А. Копп // Изв. вузов. Математика. — 2000. — № 8. — С. 53 – 62.

[37] Тронин, С.Н. Операды в категории конвексоров. I / С.Н. Тронин // Изв. вузов. Математика. — 2002. — № 3. — С. 42 – 50.

[38] Тронин, С.Н. Операды в категории конвексоров. II / С.Н. Тронин // Изв. вузов. Математика. — 2002. — № 5. — С. 61 – 69.

[39] Тронин, С.Н. Абстрактные клоны и операды / С.Н. Тронин // Сиб. мат. журн. — 2002. — Т. 43. — № 4. — С. 924 – 936.

[40] Тронин, С.Н. Операды конечных помеченных графов / С.Н. Тронин // Изв. вузов. Математика. — 2004. — № 4. — С. 50 – 60.

[41] Тронин, С.Н. О некоторых операдах, связанных с операдой симметрических групп. I / С.Н. Тронин, Л.Д. Гареева // Изв. вузов. Математика. — 2004. — № 9. — С. 61 – 72.

[42] Тронин, С.Н. Операды и многообразия алгебр, определяемые полилинейными тождествами / С.Н. Тронин // Сиб. мат. журн. — 2006. — Т. 47. — № 3. — С. 670 – 694.

[43] Тронин, С.Н. Мультикатегории и многообразия многосортных алгебр / С.Н. Тронин // Сиб. мат. журн. — 2008. — Т. 49. — № 5. — С. 1185 – 1202.

[44] Тронин, С.Н. Супералгебры и операды. I / С.Н. Тронин // Сиб. мат. журнал. — 2009. — Т. 50. — № 3. — С. 631 – 646.

[45] Тронин, С.Н. О супералгебрах над операдами / С.Н. Тронин // Сиб. мат. журнал. — 2009. — Т. 50. — № 6. — С. 1401 – 1412.

[46] Тронин, С.Н. Операда конечных помеченных турниров / С.Н. Тронин, Л.Т. Абдулмянова // Изв. вузов. Математика. — 2009. — № 2. — С. 65 – 75.

[47] Тронин, С.Н. Алгебры над операдой сфер / С.Н. Тронин // Изв. вузов. Математика. — 2010. — № 3. — С. 72 – 81.

[48] Тронин, С.Н. Операдные аналоги алгебр инцидентности / С.Н. Тронин // Матем. вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Выпуск 8. — Киров: Изд-во ВятГГУ, 2006. — С. 112 – 120.

[49] Тронин, С.Н. О строении свободных супералгебр Ли / С.Н. Тронин // Тез. сообщ. IV Всесоюзн. школы "Алгебры Ли и их применения в математике и физике", посвящ. 80-летию со дня рожд. проф. В.В. Морозова. Казань, 30 мая – 5 июня 1990 г. — Казань, 1990. — С. 45.

[50] Tronin, S.N. On the universal inverting of matrices over preadditive category / S.N. Tronin // Алгебра и Анализ. Тез. докладов междунар. научн. конфер., посвящ. 100-летию со дня рожд. Н.Г. Чеботарева (5-11 июня 1994 г., г. Казань). Часть I. — Казань, 1994. — С. 150 – 151.

[51] Тронин, С.Н. Супералгебры и линейные операды / С.Н. Тронин // Тез.сообщ. междунар. алгебр. конф., посвящ. памяти проф. Л.М. Глускина (922-1985). Славянск, Донецкая обл. Украина (25-29 сент. 1997 г.). — Киев, 1997. — С. 93 – 94.

[52] Тронин, С.Н. Матричные линейные операды / С.Н. Тронин, О.А. Копп // Алгебра и Анализ. Тез. докл. школы-конф., посвящ. 100-летию со дня рожд. Б.М. Гагаева (16-22 июня 1997 г., г. Казань). — Казань, 1997. — С. 216 – 217.

[53] Тронин, С.Н. Операды в категории конвексоров / С.Н. Тронин // Универс. алгебра и ее приложения. Тез. докл. международн. семин., посвящ. помяти проф. Л.А. Скорнякова. — Волгоград, 6-11 сент. 1999. — Волгоград: "Перемена", 1999. — С. 62 – 63.

[54] Тронин, С.Н. Многообразия супералгебр и линейные операды / С.Н. Тронин // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы школы-конференции, посвящ. 130-летию со дня рожд. Д.Ф.Егорова (Казань, 13-18 сентября 1999г.) - Казань, Казанск. мат. об-во 1999. — С. 224 – 227.

[55] Тронин, С.Н. Операды конечных графов и гиперграфов / С.Н. Тронин // Труды мат. центра им. Н.И.Лобачевского. Т.5. Актуальные проблемы математики и механики. — Казань: “Унипресс”, 2000. — С. 207 – 208.

[56] Тронин, С.Н. Абстрактные клоны и операды / С.Н. Тронин // Логика и приложения. Тез. междунар. конфер., посвящ. 60-летию ссо дня рожд. акад. Ю.Л. Ершова. Новосибирск, 4-6 мая 2000 г. — Новосибирск, 2000. — С.100.

[57] Тронин, С.Н. О характеризации многообразий алгебр над W-операдами / С.Н. Тронин // Междунар. алгебр. конф., посвящ. 250-летию Московского гос. ун-та и 75-летию каф. высш. алгебры. Тез. докл. — Москва: Изд-во мехмата МГУ, 2004. — С.127 – 128.

[58] Тронин, С.Н. Теория операд и универсальная алгебра / С.Н. Тронин // Алгебра и анализ-2004 / Материалы междунар. конф., посвящ. 200-летию Казанского гос. ун-та. Казань, 2-9 июля 2004 г. — Казань: Изд-во Казанск. мат. об-ва, 2004. — С. 20 – 21. (Труды мат. центра им. Н.И. Лобачевского, Т. 23).

[59] Tronin, S.N. Natural multitransformations of multifunctors / S.N. Tronin // Международн. алгебр. конфер., посвящ. 100-летию со дня рожд. А.Г.Куроша. Тезисы докладов. — М.: Изд-во мехмата МГУ, 2008. — С. 363 – 364.